О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ф. М. Муминов **З. М. Миратоев**
Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета

АННОТАЦИЯ

Теория уравнений смешанного типа является в настоящий момент одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. В этом статье предлагается постановка нелокальной задачи для неклассического уравнения и доказывается, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения поставленные задачи разрешимы в пространстве Соболева.

Ключевые слова: неклассического уравнения, смешанного типа, пространстве Соболева

ON A NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A NON-CLASSICAL EQUATION

F. M. Muminov **Z. M. Miratoev**
Almalyk branch of Tashkent State Technical University

ABSTRACT

The theory of equations of mixed type is currently one of the most important branches of the modern theory of partial differential equations. In this article, we propose a formulation of a nonlocal problem for a nonclassical equation and prove that, under certain conditions on the coefficients of the equation, the problems posed are solvable in the Sobolev space.

Keywords: nonclassical equation, mixed type, Sobolev space

Рассмотрим уравнение:

$$LU = K(x;y)\,U_{yy} + U_{xx} + \alpha(x;y)\,U_y + b(x;y)U + m|u|^{\rho}U = f(x;y) \qquad (1)$$

Где K(x,y)–непрерывно дифференцируемая функция , причем $K(x,y) \geq 0$ при $y \geq 0, K(x,y) < 0$ при $y < 0,\ a(x,y) \in \bar{C}(D), b(x,y) \in C^1(\bar{D})$ $, m < 0,\ p > 0$

Область D– которая состоить при y>0 из прямоугольника с вершинами в точках A(0;0), B(1;0), $A_1(0;1)$, $B_1(1;1)$, а при y<0 ограничена характеристиками уравнения (1)

$$S_1 = \left\{ (x;y) : \frac{dx}{dy} = -\sqrt{-K}, y(0) = 0, y < 0 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (x;y) : \frac{dx}{dy} = -\sqrt{-K}, y(0) = 0, y < 0 \right\}$$

Положим $S = S_1 \cup S_2$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области D такое, что

$$U(0;y) = U(1;y) = 0 \qquad (2)$$

$$\mathrm{U(x;1)} = \beta(\mathrm{x})\,\mathrm{U(x;y)}/_S \qquad (3)$$

Всюду ниже предполагается что, y∈S. $\beta(\mathrm{x}) = \exp\left[\frac{\lambda}{p+2}(-1+y)\right], \lambda > 0, \mathrm{y} \in \mathrm{S}.$

Где $y<0$. Через $W_2^1(D)$ обозначим под пространство функций из пространства $W_2^1(D)$ которые удовлетворяют краевым условиям (2)-(3)

Определение 1. Функции и $(\mathrm{x;y}) \in W_2^1(D))$ называется обобщенным решением задачи(1)-(3), если выполнено интегральное тождество.

$$\int_d \left[-U_y (KV)_Y - U_x V_x + a(x;y) U_y V + bUY + m|U|^{\rho} UV \right] dD = \int_D fV dD$$

для любой функции V из $\overset{0}{W}{}_2^1(\mathrm{D})$.

Существование обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) установим с помощью метода Галеркина [1-5]. Пусть $\{\varphi_n(x,y)\}$–множество функций из пространства $W_2^1(D)$ обладающее тем свойством , что все $\varphi_n(x,y)$ линейно независимы , а их линейные комбинации плотны в этом пространстве. Такое множество, как известно [1], [4] существует.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$lW_n = e^{-\lambda y} W_{ny}(x;y) = \varphi_n(x;y) \qquad (5)$$

$$\mathrm{W}_n(x;1) = \beta(x) W_n(x;y)/_S \qquad (6)$$

Решение задачи (5)-(6)

$$W_n(x,y) = \int_s^y e^{\lambda\tau} \varphi_n(x;\tau) dt + \frac{1}{\beta - 1} \int_S e^{\lambda t} \varphi_n(x;t) dt$$

Ясно, что $W_n(x,y)$ линейно независимы. Действительно , если $\sum_{n=1}^{N} C_n W_n = 0$ для какого-нибудь набора $W_1, W_2, \ldots\ldots W_n$ то действуя на эту сумму оператором L, имеем

$$\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(\mathrm{x};\mathrm{y}) = 0 \Rightarrow C_n = 0, \forall \mathrm{n}$$

Ясно, что $W_n(x;y) \in \mathrm{W}_2^1(D)$ нетрудно получить оценку

$$\|W_n\|_{L_p(D)}^p \leq m \|\varphi_n\|_{L_p(D)}^p$$

Кроме того $W_n(x,y)$ удовлетворяет условиям (6) для любого n. Приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$U^N(x;\mathrm{y}) = \sum_{n=1}^{N} C_n W_n(x;y)$$

Где C_n постоянные, которые определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений виде

$$(LU^N_, U_n)_0 = (fU_n)_0, n = 1, N \tag{7}$$

Разрешимость этой системы алгебраических уравнений следует из получаемых ниже априорных оценок для приближенных решений и [4] леммы «об остром угле»

Лемма 1. Пусть выполнены условия $K(x;1) \geq 0$ и неравенства

$$2a(x;y) - K_y(x;y) - \lambda K(x;y) \geq \delta > 0$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\|U^N\right\|_{\mathrm{W}_2^1(D)}^2 + \left\|U^N\right\|_{L_p(D)}^p \leq K_2 \tag{8}$$

K_2 не зависит от n.

Доказательство. Умножим (7) на C_n суммируя по n от 1 до N получим тождество

$$\int_D e^{\lambda y} U_y^N L U^N dD = \int_D e^{\lambda y} U_y^N f dD \tag{9}$$

Интегрируя левую часть равенство (9) но частям, получаем

$$\left[\lambda (U_y^N)^2 + (2a - \lambda K - Ky)(U_x^N)^2 + +\lambda (U^N)^2 + \frac{2m}{p}\left\|U^N\right\|^P\right] dD -$$

$$-\frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^1 (U_x^N)^2 dx + \frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^1 K(x;1)(U_y^N)^2 dx - \frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^1 (U^N)^2 dx + \frac{1}{2}\int_S e^{\lambda y}\left[((U_y^N)^2 - K(U_y^N)^2 + m\left|U^N\right|^p + (U^N)^2)n_1 - 2(U_x^N)(U_y^N)n_2\right] ds$$

Где $n=(n_1:n_2)$– единичный вектор внутренный нормали к ∂D. Используя условия (3) и условия леммы получим неравенство (8). Вернемся к вопросу о разрешимости системы уравнений (7). Если записать ее в виде $\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}) = 0$, где

$\vec{C}=(C_{1_m}.....C_{n_m})$ то как мы только что убедились умножая $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}),\overrightarrow{C})_0$ получаем оценку $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}),\overrightarrow{C})_0 \geq K_0\left\|U^N\right\|^2_{w_2^1(D)}-K_1$

В силу того, что линейная оболочка $L(\mathrm{W}_1,\mathrm{W}_2,......\mathrm{W}_m)$ есть конечномерное пространство [6-11], существует $К_2(m)$ такое , что

значить, выполнено неравенство $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}),\overrightarrow{C})_0 \geq K_2(m)\sum_{S=1}^{N}C_S^2-K_1 \geq 0$

Если $\vec{C}$ достаточно больщая величина

А это условие “острого угла”, достаточное для разрешимости системы уравнений (7) .

Теорема . Пусть выполнены условия леммы.

Тогда для любой функции $f(x;y)\in L_2(D)$ существует обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство . В силу оценки (8), последовательность $\left\{\left|U^N\right|^p U^N\right\}$ ограничено в пространстве L_q где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда на основании (8) из последовательности $\{U^N\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в $\mathrm{W}_2^1(D)$ к некоторой функции U(x,y) и последовательности $\left|U^N\right|^p U^N$ слабо сходится в $\mathrm{L_q}(D)$ к функции $\mathrm{q}(x;y)$ $\left|U^N\right|^p U^N \to q(x;y)$ в L_q

Одноко но теореми веожение $\mathrm{W}_2^1(D)$ в $L_2\,(D)$ вполне непрерывно. Следовательно [12-14] , мы можем считать , что подпоследовательность $U^N(x;y)$ силно в $L_2\,(D)$ и почти всюду. Теперь применим лемму 1 из [2], [4] о предельнои переходе в нелинейном члене в случае , когда из нее следует, что

$$q(x,y)=|U|^p U$$

Далее , переходя к пределу при $N\to\infty$ в (7) при функсированном n, будем иметь равенство

$$\int_D\left[-U_y(K\varphi_n)_y-U_x\varphi_n+\alpha U\varphi_n+\beta(x;y)U\varphi_n+m|U|^p U\varphi_n\right]dD=\int_D f\varphi_n dD$$

Где функцие $U(x;\mathrm{y})$ принадлежить $\mathrm{W}_2^1(D)$. Отсюде в виду плотносити $\{\varphi_n\}$ в пространстве $\mathrm{W}_2^1(D)$ следует, что интегральное тождество $|4|$ справедливо для любой $\mathrm{V(x;y)}\in \overset{0}{W}{}^1_2(D)$ теорема доказана [15-18].

REFERENCES

[1] Врагов В.Н. Краевые задании неклассических уравнений математической функци. Новосибирек: НГУ,1983-1984

[2] Врагов В.Н.К. вопросу о единственности решения обобщенной задачи Трикоми. Докл. АН.СССР.1996-Т.226 №4 . С 761-764.

[3] Глазатов С.Н. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смещанного типа. Афтореф. Диес.к.ф.м.н Новосибирек,1986.

[4] Лионс. Ж.Л.Некоторые методы решения нелинейных краевих задач. М: Мир,1972.

[5] Ф.М.Муминов. О нелокальных краевых задачах для уравнений смешанного типа второго рода. Ташкент 2011.

[6] Самадов, А., & Носиров, Н. (2021). СПОСОБ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЦЕННЫХ КОМПОНЕНТОВ (ЗОЛОТО, СЕРЕБРО) ИЗ ХВОСТОВ ЗИФ. *InterConf*.

[7] Самадов, А., Носиров, Н., & Жалолов, Б. (2021). Изучение минералогический состав хвостов Чадакской зиф. *InterConf*.

[8] Samadov, A., Nosirov, N., Qosimova, M., Muzafarova, N., & Almalyk, B. (2021). Processing of layout tails of gold-extracting factories. *Збірник наукових праць SCIENTIA*.

[9] Носиров, Н. И. (2021). Рекомендуемая схема переработки хвостов чадакской золотоизвлекательных фабрик. *Scientific progress*, *1*(6).

[10] Носиров, Н. И. (2021). Изучение Обогатимости Золотосодержащих Хвостов. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, *2*(4), 11-16.

[11] Носиров, Н. И. (2021). ИССЛЕДОВАНИЙ СПОСОБОВ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЗОЛОТА И СЕРЕБРА ИЗ ХВОСТОВ ЗОЛОТОИЗВЛЕКАТЕЛЬНЫХ ФАБРИК. *Scientific progress*, *1*(6).

[12] Носиров, Н. И. (2021). АНАЛИЗ ВЫПОЛНЕНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СПОСОБОВ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЗОЛОТА И СЕРЕБРА ИЗ ХВОСТОВ ЗОЛОТОИЗВЛЕКАТЕЛЬНЫХ ФАБРИК. *Scientific progress*, *1*(6).

[13] Nosirov, N. (2021). TAKING SAMPLES OF STRAIGHT TAILS OF THE TAILS OF THE GOLD EXTRACTION FACTORY. *Збірник наукових праць SCIENTIA*.

[14] Хайитов, О., Умирзоков, А., & Бекмуродов, А. (2020). О применении методов подсчета запасов газа в месторождении северный гузар. Збірник наукових праць ΛΌГOΣ, 56-59.

[15] Djurayevich, K. K., Kxudoynazar O'g'li, E. U., Sirozhevich, A. T., & Abdurashidovich, U. A. (2020). Complex Processing Of Lead-Containing Technogenic Waste From Mining And Metallurgical Industries In The Urals. The American Journal of Engineering and Technology, 2(09), 102-108.

[16] Abdurashidovich, U. A. (2020). Prospects for the Development of Small-Scale Gold Mining in Developing Countries. Prospects, 4(6), 38-42.

[17] Shukurovna, N. R., Yunusovna, N. X., Jumaboyevich, J. S., & Abdurashidovich, U. A. (2021). Perspective Of Using Muruntau Career's Overburden As Back Up Sources Of Raw Materials. The American Journal of Applied sciences, 3(01), 170-175.

[18] Муминов, Ф. М., Миратоев, З. М., & Утабов, У. А. (2021). Об Одной Краевой Задаче Для Уровнениясоставного Типа Третьего Порядка. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, *2*(4), 17-22.